

Метод Гаусса-Зейделя

Метод Гаусса-Зейделя (также известен как метод Либмана или метод последовательных смещений) — итерационный метод решения системы линейных уравнений. Назван в честь немецких математиков Карла Фридриха Гаусса (1777–1855) и Филиппа Людвиг фон Зейделя (1821–1896).

Задача: решить систему $Ax = b$, где A — квадратная матрица $n \times n$ с ненулевыми диагональными элементами, x — вектор неизвестных, b — вектор правой части.

Алгоритм

Каждое уравнение системы разрешается относительно соответствующей переменной. На каждой итерации компоненты x_i вычисляются последовательно: $x_i(k+1) = (b_i - \sum_{j < i} a_{ij} \cdot x_j(k+1) - \sum_{j > i} a_{ij} \cdot x_j(k)) / a_{ii}$, где $x_j(k+1)$ — уже обновлённые компоненты ($j < i$), а $x_j(k)$ — значения с предыдущей итерации ($j > i$).

Алгоритм:

1. Задать начальное приближение $x(0)$ (например, нулевой вектор).
2. Для каждого i от 1 до n вычислить $x_i(k+1)$ по формуле, используя уже обновлённые значения $x_1 \dots x_{i-1}$.
3. Проверить критерий останова: $\|x(k+1) - x(k)\| < \varepsilon$, где ε — заданная точность. Если критерий не выполнен — перейти к шагу 2 (следующая итерация).

Особенность: при вычислении каждой следующей компоненты вектора решения сразу используются уже обновлённые значения предыдущих компонент текущей итерации. Это обеспечивает более быструю сходимость по сравнению с методом Якоби.

Метод требует хранения только одного вектора x — значения перезаписываются по мере вычисления.

Условия сходимости

Сходимость метода Гаусса-Зейделя гарантирована, если матрица A удовлетворяет хотя бы одному из условий:

- Строгое диагональное преобладание: для каждой строки модуль диагонального элемента больше суммы модулей всех остальных элементов строки: $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.
- Симметричная положительно определённая матрица: $A = A^T$ и все собственные значения положительны.

Если ни одно из условий не выполнено, метод может как сходиться, так и расходиться. На практике систему часто можно привести к диагональному преобладанию перестановкой строк.

Примеры задач

Метод Гаусса-Зейделя используется в различных задачах, например:

- Расчёт трубопроводных и тепловых сетей.
- Конечно-элементные задачи (МКЭ-задачи теплопроводности, фильтрации и упругости) — метод применяется как предобусловливатель или самостоятельный решатель для систем средней размерности.
- Расчёт электрических сетей — метод Зейделя применялся в классических алгоритмах расчёта установившихся режимов электрических сетей (power flow) до широкого внедрения метода Ньютона–Рафсона.

Реализация

Метод Гаусса-Зейделя может быть реализован на компьютере. Существуют программы, которые принимают размеры матрицы, начальные значения и количество итераций в качестве входных данных.

Прямая параллелизация метода затруднена, поскольку каждая компонента зависит от уже вычисленных значений текущей итерации. Однако существуют

модификации (блочный метод Зейделя, красно-чёрное упорядочение),
допускающие параллельное выполнение